Varianta 061

Subiectul I

a) $|2\vec{i}+5\vec{i}|=\sqrt{29}$ .b) AB=$\sqrt{2}$ .c) $\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$.

d) $\begin{cases} a=1 \\ b=-13 \end{cases}$ .e) $S_{ABC}=\frac{1}{2}|\Delta|$ f), $\begin{cases} a=\frac{11}{17} \\ b=\frac{7}{17} \end{cases}$.

Subiectul II

1.a) In $\mathbf{Z}_7$ avem $\hat{3}^{2007}=\hat{6}$ .b) E=$C_9^4-C_9^5=0$ .c) $x=1, x=-1, x=\sqrt{2}, x=-\sqrt{2}$;

d)x=1 este unica solutie a ecuatiei date.e) Probabilitatea ceruta este egala cu $\frac{4}{5}$.

2. $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^5+2x-1$

a) $f'(x)=5x^4+2, x\in\mathbf{R}$. b) $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$ .c) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=2$. d) $f'(x)>0$, $x\in\mathbf{R}$

e) $\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}+5}{2n+7}=0$.

Subiectul III

a) In $(\mathbf{Z}_{24},+,\cdot)$ avem $\hat{6}^3=\hat{0}$, deci $\hat{6}$ este nilpotent, $\hat{2}$ nu este nilpotent, deoarece nici o putere a lui $\hat{2}$ nu este divizibila cu 3, deci nu este divizibil cu 24.

b) In $\mathbf{Z}_{24}$ avem $\hat{6}^3=\hat{0}$, $\hat{12}^3=\hat{0}$, $\hat{6}^2\cdot\hat{12}=\hat{6}^3\cdot\hat{2}=\hat{0}$, $\hat{6}\cdot\hat{12}^2=\hat{6}^3\cdot\hat{2}=\hat{0}$, deci f=$\hat{6}x+\hat{12}$ este nilpotent in $\mathbf{Z}_{24}$, pt ca $f^3=\hat{0}$; iar polinomul g=x+$\hat{1}$ nu este nilpotent pentru ca orice putere a lui g va contine cel putin un termen diferit de $\hat{0}$.

c) Daca 6|a $\Leftrightarrow a=6k\Rightarrow\hat{a}^3=(6\hat{k})^3=\hat{0}$, deci $\hat{a}$ este nilpotent in $\mathbf{Z}_{24}$.Daca $\hat{a}$ este nipolent in $\mathbf{Z}_{24}$, atunci $\exists n\in\mathbf{N}^*$ astfel incat $\hat{a}^n=\hat{0}\Rightarrow\hat{0}\Rightarrow\exists n\in\mathbf{N}$ astfel incat a^n sa fie divizibil cu 24 $\Rightarrow 6|a^n\Rightarrow 6|a$;

d) Conform punctului c) avem a$\in\mathbf{Z}_{24}$ este nilpotent daca si numai daca 6|a, rezulta ca elementele nipotente din ($\mathbf{Z}_{24}$,+)sunt ($\hat{0},\hat{6},\hat{12},\hat{18}$).

e) Daca $\hat{a},\hat{b}\in\mathbf{Z}_{24}$ sunt nilpotente, atunci 6|a si 6|b. Pentru f=$\hat{a}x+\hat{b}$ avem $f^3=((\hat{a})x+\hat{b})^3$, in fiecare coeficient apar puterile lui $\hat{a},\hat{b}$, dar 6|a ,6|b , deci $f^3=0$;

f) f=$\hat{a}x^3+\hat{b}x^2+\hat{c}x+\hat{d}$, daca $\hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d}$ sunt nilpotente, deci divizibile cu 6

$\Rightarrow f=6\cdot g$, $f^3=6^3\cdot g^3=0$. Reciproc,

$f^n(x)=\hat{a}^n\cdot x^{3n}+...$, $\hat{a}^n=\hat{0}\Rightarrow\hat{a}$ este nilpotent $\Rightarrow$ *g(x)=* *f(x)*-$\hat{a}\cdot x^3$ este nilpotent si procedam la fel pentru g

g) Numarul polinoamelor nilpotente in $\mathbf{Z}_{24}$[x] care au gradul 3, este $3\cdot 4\cdot 4\cdot 4=192$, pentru ca $f=\hat{a}x^3+\hat{b}x^2+\hat{c}x+d$, $\hat{a}\in\{\hat{6},\hat{12},\hat{18}\}$, $\hat{b},\hat{c},\hat{d}\in\{\hat{0},\hat{6},\hat{12},\hat{18}\}$.

Subiectul IV

a) $f'(x) = 2xe^{x^2}$, $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$.

b) $F'(x) = e^{x^2}, \forall \in \mathbf{R} \Rightarrow F'(x) > 0, \forall \in \mathbf{R} \Rightarrow$ F este strict crescatoare pe $\mathbf{R} \Rightarrow F$ este injectiva.

c) Inegalitatea $e^x \geq x+1, \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$ .Fie functia $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = e^x - x - 1$. Avem $g(0) = 0$ este punct de minim global, deci $.e^x \geq x+1, \forall x \in \mathbf{R}$.

d) Daca in inegalitatea de la pct c) inlocuim x cu t^2, obtinem : $e^{t^2} > t^2 + 1, \forall t \in \mathbf{R}^*$

$$\Rightarrow \int_0^x e^{t^2} dt > \frac{1}{3}x^3 + x \Leftrightarrow F(x) > \frac{1}{3}x^3 + x, \forall x > 0$$

Avem $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt$. Facem substitutia t = -u si obtinem $\int_0^{-x} f(t)dt = \int_0^{x} f(-u)(-du) = -\int_0^x f(u)du = -F(x)$.

Din $F(x) > \frac{1}{3}x^3 + x, \forall x > 0$ rezulta $F(x) < \frac{x^3}{3} + x, \forall x < 0$

e) Functia F este injectiva (punctul b))

Avem F(x)> $\frac{1}{3}x^3 + x, \forall x > 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$

F(x)< $\frac{1}{3}x^3 + x, \forall x < 0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$. Functia F este continua pe R, deci este surfectiva. Functia F este injectiva si surjectiva, deci F este bijectiva.

f) $\lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{G(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{G(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{G(x)}{F(G(x))} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{F(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{F'(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{f(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{e^{t^2}} = 1.$

g) Presupunem ca $\exists u, v \in \mathbf{R}[X]$, nenule astfel incat F(x)= $\frac{u(e^{x^2})}{v(e^{x^2})}, \forall x \in \mathbf{R}$ .Fie

$e^{x^2} = t \Rightarrow x^2 = \ln t \Rightarrow x = \sqrt{\ln t}$, pentru $t \geq 1$

$$\Rightarrow F(\sqrt{\ln t}) = \frac{u(t)}{v(t)}, t > 1. \text{ Derivand, obtinem } F'(\sqrt{\ln t}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln t}} \cdot \frac{1}{t} = \left(\frac{u(t)}{v(t)}\right)' \Leftrightarrow \frac{e^t}{2t\sqrt{\ln t}} = \frac{P(t}{Q(t)} \Leftrightarrow$$

$$1 = \frac{2t\sqrt{\ln t} \cdot P(t)}{e^t \cdot Q(t)}, \forall x \geq 1$$

Trecând la limita $t \to 0$, obținem contradictie 1=0